Extrema liés

(148, 159, 206, 214, 215, 219)

Avez p. 102 et El Amrani p. 432

lem : Soit $v, u_1, \dots, u_k \in (\mathbb{R}^n)^*$. Si $(u_1, \dots, u_k)$ est libre et $\bigcap_{i=1}^k Ker(u_i) \subset Ker(v)$. Alors $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ tels que $v = \sum_{i=1}^k \lambda_i u_i$

démo : On pose $F = Vect(u_1, \dots, u_k)$ et $D = Vect(v)$. Alors on a

$\bigcap_{i=1}^k Ker(u_i) = \{x \in \mathbb{R}^n, \forall i \in [\![1, k]\!], u_i(x) = 0\} = F^\circ$ et $Ker(v) = D^\circ$

Par hypothèse, on a $F^\circ \subset D^\circ$ donc $(D^\circ)^\perp \subset (F^\circ)^\perp$ ie $D \subset F$.

Or $v \in D \subset F$ donc $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$, $v = \sum_{i=1}^k \lambda_i u_i$.

prop : Soit Γ une sous-variété de dimension d et $m \in \Gamma$. Alors $T_m\Gamma$ est un ev de dimension d.

démo : Soit Γ une sous-variété de dimension d et $m \in \Gamma$.

Ainsi, il existe U un voisinage ouvert de m et $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n-d} \times \mathbb{R}^d$ un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme tel que $\varphi(U \cap \Gamma) \subseteq \mathbb{R}^d \times \{0_{\mathbb{R}^{n-d}}\}$.

Montrons que $d\varphi(m) . T_m\Gamma = \mathbb{R}^d \times \{0_{\mathbb{R}^{n-d}}\}$.

* Soit $v \in T_m\Gamma$, alors par définition, il existe $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle contenant 0 et $\gamma : I \to \Gamma$ $\mathcal{C}^1$ tel que $\gamma(0) = m$ et $\gamma'(0) = v$.

Alors $\varphi \circ \gamma$ est une courbe de $\mathbb{R}^d \times \{0_{\mathbb{R}^{n-d}}\}$ tel que $\varphi(\gamma(0)) = \varphi(m)$

En différentiant en $t = 0$, $d\varphi(\gamma(t)) . \gamma'(t)\big|_{t=0} = d\varphi(m) . v$

* Soit $w \in \mathbb{R}^d \times \{0_{\mathbb{R}^{n-d}}\}$. On a $\varphi(U)$ qui est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $\varphi(\Gamma \cap U) = \varphi(U) \cap (\mathbb{R}^d \times \{0\})$ est un ouvert de $\mathbb{R}^d$. Donc il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\forall |t| < \varepsilon$, $\varphi(m) + tw \in \varphi(\Gamma \cap U)$.

On pose $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\longrightarrow \Gamma \cap U$, $t \longmapsto \varphi^{-1}(\varphi(m) + tw)$ qui est bien définie, de classe $\mathcal{C}^1$ et qui vérifie $\gamma(0) = m$ et $\gamma'(0) \in T_m\Gamma$

Enfin, $\varphi \circ \gamma(t) = \varphi(m) + tw$ $\forall t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$ donc $(\varphi \circ \gamma)'(t) = w$

Ainsi $(\varphi \circ \gamma)'(0) = d\varphi(\gamma(0)) . \gamma'(0) = d\varphi(m) . \gamma'(0) = w$

On obtient alors que $T_m\Gamma = (d\varphi(m))^{-1}(\mathbb{R}^d \times \{0\})$.

thm : Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f, g_1, \dots, g_p : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. On pose $g = (g_1, \dots, g_p) : U \to \mathbb{R}^p$ et $\Gamma = \{x \in U, g(x) = 0\}$. Si a est un extremum de f dans Γ et si les différentielles $d_a g_1, \dots, d_a g_p$ sont linéairement indépendantes, alors il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ tels que $d_a f = \sum_{i=1}^p \lambda_i d_a g_i$.

démo :

* Π est une sous-variété :

Comme $d_a g_1, \dots, d_a g_p$ sont linéairement indépendantes, $d_a g$ est surjective et on a $\Pi = g^{-1}(\{0_{\mathbb{R}^p}\})$.

Donc Π est une sous-variété de dimension $n-p$.

* $T_a\Pi = \bigcap_{i=1}^{p} \mathrm{Ker}(d_a g_i) =: T$

  - $T_a\Pi$ est un ev de dimension $n-p$.
  - On a $\mathrm{Ker}(d_a g) = \bigcap_{i=1}^{p} \mathrm{Ker}(d_a g_i)$ et $\dim \mathrm{Im}(d_a g) = p$ donc par le thm du rang, $\dim T = n-p$.
  - Montrons que $T_a\Pi \subseteq T$.

  Soit $v \in T_a\Pi$. Alors il existe $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle contenant 0 et $\gamma : I \longrightarrow \Pi$ de classe $\mathcal{C}^1$ tel que $\gamma(0) = a$ et $\gamma'(0) = v$. Comme $\gamma(t) \in \Pi$ on a $g_i(\gamma(t)) = 0$ $\forall t \in I, \forall i \in [\![1,p]\!]$.

  Donc $\forall i \in [\![1,p]\!]$ $\quad d_{\gamma(t)} g_i \cdot \gamma'(t)\Big|_{t=0} = d_a g_i \cdot v = 0$.

  Donc $v \in T$.

* $T_a\Pi \subset \mathrm{Ker}(d_a f)$.

Soit $v \in T_a\Pi$, alors il existe $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle contenant 0 et $\gamma : I \to \Pi$ de classe $\mathcal{C}^1$ tel que $\gamma(0) = a$ et $\gamma'(0) = v$. Comme $\gamma(t) \in \Pi$, on a $f|_{\Pi} \circ \gamma(t) = f \circ \gamma(t)$ $\forall t \in I$.

Par hypothèse a est un extremum local de f sur Π, donc $f \circ \gamma$ admet un extremum local en $t = 0$.

Donc
$$0 = (f \circ \gamma)'(0) = d_{\gamma(0)} f \cdot \gamma'(0) = d_a f \cdot v$$

Donc $v \in \mathrm{Ker}(d_a f)$.

* On conclut par le lemme.

appli : (thm spectral) Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien et soit $u \in \mathcal{L}(E)$ symétrique. Alors u est diagonalisable sur E.

démo : Raisonnons par récurrence sur $\dim E = n$.

* Pour $n = 1$, tous les endomorphismes sont diagonaux.
* On pose $\quad g : \begin{array}{l} E \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \|x\|^2 - 1 \end{array}$ $\quad$ et $\quad f : \begin{array}{l} E \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \langle u(x), x \rangle \end{array}$.

Par définition $g^{-1}(\{0\}) = \mathbb{S}^{n-1}$, qui est un compact donc $f|_{\mathbb{S}^{n-1}}$ admet un minimum, on le note e_1.

Comme $d_x g(h) = 2\langle x, h \rangle$ est surjective et non nulle, $d_{e_1} g$ est une famille libre.

Ainsi par le thm des Extrema liés, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $d_{e_1} f = \lambda d_{e_1} g$.

Or $d_x f(h) = 2\langle u(x), h\rangle$ $\forall x, h \in E$.

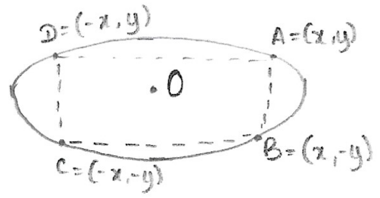
Donc $u(e_1) = \lambda e_1$, ie e_1 est un vecteur propre de u.

Enfin, on pose $F = \text{Vect}(e_1)^{\perp}$, pour $x \in F$, on a $\langle u(x), e_1\rangle = \langle x, u(e_1)\rangle = \langle x, \lambda e_1\rangle = 0$.
Donc F est u-stable.

Comme $\dim F = n-1$, on conclut en appliquant l'hypothèse de récurrence à $u_{|F}$.

appli : Soit $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ (E). Trouver le volume maximal d'un parallélépipède inscrit dans (E)

démo : Par une translation, on centre notre ellipse en O.



Donc on a Volume $= 2x \cdot 2y \cdot 2z = 2^3 xyz$.

On veut $\max\limits_{x,y,z \in (E)} xyz$.

On pose $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x,y,z) \longmapsto xyz$ et $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x,y,z) \longmapsto \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1$

On a $d_{(x,y,z)} g = \begin{pmatrix} \frac{2x}{a^2} & \frac{2y}{b^2} & \frac{2z}{c^2} \end{pmatrix}$ et $d_{(x,y,z)} f = \begin{pmatrix} yz & xz & yx \end{pmatrix}$

Par le thm des Extrema liés, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $d_{(x,y,z)} f = \lambda d_{(x,y,z)} g$.

Donc $\begin{cases} yz = \lambda \frac{2x}{a^2} \\ xz = \lambda \frac{2y}{b^2} \\ yx = \lambda \frac{2z}{c^2} \end{cases} \iff \begin{cases} xyz = \lambda \frac{2x^2}{a^2} \\ xyz = \lambda \frac{2y^2}{b^2} \\ xyz = \lambda \frac{2z^2}{c^2} \end{cases}$ on somme et on obtient $\begin{cases} 3xyz = 2\lambda \\ \frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2} = \frac{1}{3} \end{cases}$

Donc $x = \sqrt{\frac{a^2}{3}} = \frac{a}{\sqrt{3}}$, $y = \frac{b}{\sqrt{3}}$ et $z = \frac{c}{\sqrt{3}}$

Donc le volume maximal est $2^3 \frac{abc}{3\sqrt{3}}$.

rem : c'est bien le maximum car le minimum serait 0 et $abc \neq 0$.

Questions : Extrema liés

- Autre démo du lemme.

On complète la famille $(u_1, -, u_k)$ en une base de $(\mathbb{R}^n)^*$ $(u_1, -, u_k, u_{k+1}, -, u_n)$.

On note $(e_1, -, e_n)$ la base antiduale de $(u_1, -, u_n)$.

On a alors $\bigcap_{i=1}^{k} \mathrm{Ker}(u_i) = \mathrm{Vect}(e_{k+1}, -, e_n)$.

En effet,

- Soit $x \in \bigcap_{i=1}^{k} \mathrm{Ker}(u_i)$. Alors $x \in \mathbb{R}^n$ donc $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ comme $x \in \bigcap_{i=1}^{k} \mathrm{Ker}(u_i)$ on a

$$u_i\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = 0 \quad \forall i \in [\![1, k]\!]$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j u_i(e_j) = x_i$$ D'où $\forall i \in [\![1, k]\!], x_i = 0$.

Ainsi $x = \sum_{i=k+1}^{n} x_i e_i \in \mathrm{Vect}(e_{k+1}, -, e_n)$

- Soit $x \in \mathrm{Vect}(e_{k+1}, -, e_n)$. On a $\forall i \in [\![1, k]\!]$

$$u_i(x) = u_i\left(\sum_{j=k+1}^{n} \lambda_j e_j\right) = \sum_{j=k+1}^{n} \lambda_j u_i(e_j) = 0$$ car $u_i(e_j) = \delta_{ij}$ mais $i \in [\![1, k]\!]$ et $j \in [\![k+1, n]\!]$.

Comme $v \in (\mathbb{R}^n)^*$, on a $v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i$

Or $\forall j \in [\![k+1, n]\!]$ $v(e_j) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i(e_j) = \lambda_j = 0$ car par hypothèse $e_j \in \mathrm{Ker}\, v$.

Donc $v = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i u_i$.

- $dg(a)$ surjective ssi $\{dg_i(a)\}_{i \in [\![1,p]\!]}$ libre ?

$\Rightarrow$ Supposons $\lambda_1 dg_1(a) + — + \lambda_p dg_p(a) = 0$. Comme $dg(a)$ est surjective, si on fixe $i \in [\![1, p]\!]$ il existe $x \in U$ tel que $dg_i(a)(x) = 1$ et $dg_j(a)(x) = 0$ $\forall j \neq i$.

Alors $\lambda_1 dg_1(a)(x) + — + \lambda_p dg_p(a)(x) = \lambda_i = 0$ ceci étant vrai $\forall i$.

$\Leftarrow$ Soit $(e_1, -, e_p)$ une base de $\mathbb{R}^p$, $(e_1^*, -, e_p^*)$ sa base duale. Soit $\varphi \in \mathrm{Im}(dg(a))^\perp$

Donc $\varphi = \lambda_1 e_1^* + — + \lambda_p e_p^*$ et on a $\forall x \in \mathbb{R}^n$ $\varphi(dg(a))(x) = 0 = \lambda_1 dg_1(a)(x) + — + \lambda_p dg_p(a)(x)$

Donc $\lambda_1 dg_1(a) + — + \lambda_p dg_p(a) = 0$ comme $\{dg_i(a)\}$ famille libre, on a $\forall i\ \lambda_i = 0 \Rightarrow \varphi = 0$

Autrement dit, $(\mathrm{Im}(dg(a)))^{\perp} = \{0\}$ donc $\mathrm{Im}(dg(a)) = \mathbb{R}^p$ i.e. $dg(a)$ est surjective

- $df(x)(h) = 2\langle u(x), h\rangle \quad \forall x, h \in E$
  $dg(x)(h) = 2\langle x, h\rangle \quad \forall x, h \in E$

$g(x+h) - g(x) = \langle x+h, x+h\rangle - \langle x, h\rangle = \langle x, h\rangle + \langle h, x\rangle + \langle h, h\rangle = 2\langle x, h\rangle + o(\|h\|^2)$.

$$f(x+h) - f(x) = \langle u(x+h), x+h\rangle - \langle u(x), x\rangle = \langle u(x), h\rangle + \langle u(h), x\rangle + \langle u(h), h\rangle$$
$$= 2\langle u(x), h\rangle + \langle u(h), h\rangle.$$

or $|\langle u(h), h\rangle| \leqslant \|u\| \, \|h\|^2 = o(\|h\|^2)$.

D'où $dg(x)(h) = 2\langle x, h\rangle$ et $df(x)(h) = 2\langle u(x), h\rangle \quad \forall x, h \in E$.